Forblad

Nogle Pladeformler

K.W. Johansen

Tidsskrifter

BSM 4-1 Bygningsstatiske Meddelelser

1932

NOGLE PLADEFORMLER

AF *K. W. JOHANSEN*

Som Eksempler paa den praktiske Anvendelse af Brudlinieteorien og i Særdeleshed paa Arbejdsligningen[1]) skal i det følgende angives Formler for nogle hyppigt forekommende Tilfælde. Arbejdsligningen kan skrives $A_u = A_i$, hvor A_u er de ydre Kræfters Arbejde, A_i de indre Kræfters Arbejde. $A_u = \Sigma Py = \Sigma M_u \cdot \theta$, hvor M_u er de ydre Kræfters Moment om den betragtede Pladedels Drejningsakse, θ Pladedelens Drejning om samme Akse. $A_i = \Sigma M_i \cdot \theta$, hvor M_i er de indre Kræfters Moment om Drejningsaksen, men da Forskydningskræfternes og de vridende Momenters Arbejde er Nul for hele Pladen, da der ingen Forskydning og Vridning finder Sted i Brudlinierne, kan det udelades ved hver Pladedel. M_i bliver da Brudmomenternes Moment om Drejningsaksen. Brudfiguren bestemmes saadan, at Brudmomentet m pr. Længdeenhed bliver Maksimum. Da det fører til meget indviklede Beregninger at bestemme den rigtige Brudfigur, er der i det følgende regnet med en omtrent rigtig Brudfigur. Dette giver praktisk talt samme Resultat, idet smaa Afvigelser fra den rigtige Brudfigur er uden Betydning, da Variationen ved et Maksimum er meget lille.

For en simpelt understøttet Bjælke af Spændvidde a og belastet med Kraften P jævnt fordelt over Strækningen l bliver Momentet $\frac{1}{8}P(2a-l)$. Det ligger da nær at skønne Momentet i en kvadratisk simpelt understøttet Plade med samme Spændvidde og jævnt belastet paa Rektangelet $k \cdot l$ med Kraften P til

$$m_P = \frac{P}{24} \cdot \frac{2a-k}{a} \cdot \frac{2a-l}{a}, \tag{1}$$

idet jævnt fordelt Belastning over hele Pladen, d. v. s. $k = l = a$, skal give $m = P:24$. Vi vil undersøge denne Formels Nøjagtighed i nogle specielle Tilfælde.

1. $k = 0$ (Fig. 1). Med den skønnede Brudfigur faas, naar Centrum sænkes 1, »Vipperen«s Drejning om Drejningsaksen cd til $1:\left(a\sqrt{\frac{1}{2}} - x\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

[1]) Se »*Bygningsstatiske Meddelelser*« 1931, Side 9.

og Kantdelens om Drejningsaksen de til $1 : \frac{a}{2}$. Ved »Vipperen« er $M_i = mx\sqrt{2}$, $M_u = 0$ og ved Kantdelen $M_i = m(2a - x)$, $M_u = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{l}{4}\right)$,

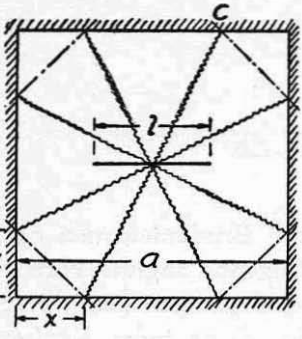

Fig. 1.

hvoraf $A_i = 4m(a - 2x)\frac{2}{a} + 4mx\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{a - x}$;

$$A_u = 2 \cdot \frac{P}{2}\left(\frac{a}{2} - \frac{l}{4}\right) \cdot \frac{2}{a};$$

$$m = \frac{P}{16}(2a - l)\frac{a - x}{a^2 - 2ax + 2x^2};$$

der bliver Maksimum for $x = a\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \sim \frac{a}{4}$.

$$m = \frac{P}{13{,}3}\left(2 - \frac{l}{a}\right), \tag{1a}$$

medens (1) giver

$$m = \frac{P}{12}\left(2 - \frac{l}{a}\right),$$

der er ca. 11 % paa den sikre Side.

2. $k = \frac{l}{2}$ (Fig. 2). Samme Brudfigur som tidligere med $x = \frac{a}{4}$. Belastningsfladen deles i Trekanterne A, B og C med Belastningerne

$P_A = \frac{P}{2k^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{2} = \frac{P}{16}$, virkende $\frac{a}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{k}{2}$ fra Drejningsaksen cd

$P_B = \frac{P}{2k^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{3}{4}k = \frac{3P}{32}$, virkende $\frac{3}{4}a\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}k\sqrt{\frac{1}{2}}$ fra Drejningsaksen de

$P_C = \frac{P}{2k^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot k = \frac{P}{4}$, virkende $\frac{a}{2} - \frac{2}{3}k$ fra Drejningsaksen ef.

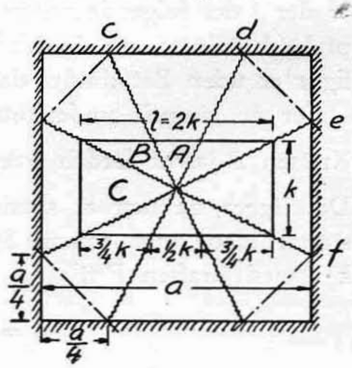

Fig. 2.

Udtrykket for A_i bliver som før, der med $x = \frac{a}{4}$ giver $A_i = \frac{20}{3}m$, medens

$$A_u = 2\frac{P}{16}\left(\frac{a}{2} - \frac{k}{3}\right)\frac{2}{a} + 2 \cdot \frac{P}{4}\left(\frac{a}{2} - \frac{2k}{3}\right)\frac{2}{a} + 4 \cdot \frac{3P}{32} \cdot \frac{3}{4}(a - k)\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{4}a} = P\left(1 - \frac{9}{8}\frac{k}{a}\right),$$

$$m = \frac{3}{20}P\left(1 - \frac{9}{16}\frac{l}{a}\right), \tag{1b}$$

medens (1) giver

$$m = \frac{P}{24}\left(2-\frac{l}{a}\right)\left(2-\frac{1}{2}\frac{l}{a}\right).$$

Til Sammenligning tjener følgende Værdier af $m:P$ for

$\frac{l}{a}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
(1)	0,167	0,154	0,142	0,131	0,120	0,109	0,099	0,089	0,080	0,071	0,063
(1b)	0,150	0,142	0,133	0,125	0,116	0,108	0,099	0,091	0,082	0,074	0,066,

der viser, at de to Formler giver praktisk talt det samme.

3. $k = l$ (Fig. 3). Med samme Brudfigur som før deles Belastningsfladen i 8 lige store Dele, der hver faar $\frac{1}{8}P$, som paa »Vipperen« angriber $\frac{7}{12}\sqrt{\frac{1}{2}}\,l$ fra c og paa Kantdelen $\frac{l}{3}$ fra c. A_i bliver som før $\frac{20}{3}m$, medens A_u bliver

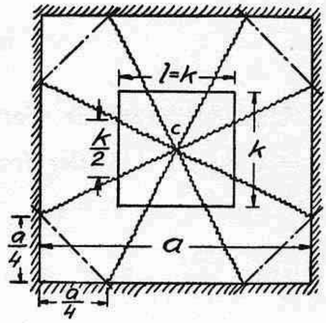

Fig. 3.

$$4\cdot\frac{P}{8}\left(\frac{a}{2}-\frac{l}{3}\right)\frac{2}{a}+4\cdot\frac{P}{8}\left(\frac{3}{4}a\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{7}{12}\sqrt{\frac{1}{2}}\,l\right)\frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{4}a}$$

$$= P\left(1-\frac{13}{18}\frac{l}{a}\right),$$

$$m = \frac{3}{20}P\left(1-\frac{13}{18}\frac{l}{a}\right), \qquad (1\text{c})$$

medens (1) giver

$$m = \frac{P}{24}\cdot\left(2-\frac{l}{a}\right)^2.$$

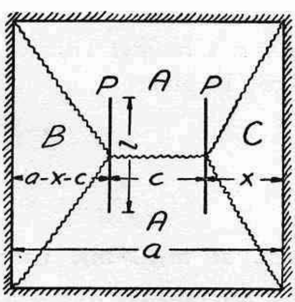

Fig. 4.

Til Sammenligning tjener følgende Værdier af $P:m$ for

$\frac{l}{a}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
(1)	0,167	0,150	0,135	0,120	0,107	0,094
(1c)	0,150	0,139	0,128	0,118	0,107	0,096

$\frac{l}{a}$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
(1)	0,082	0,070	0,060	0,050	0,042
(1c)	0,085	0,074	0,063	0,052	0,042,

der som før kun viser en ganske uvæsentlig Afvigelse.

Vi vil dernæst undersøge Tilfældet med to Kræfter P paa Pladen, og indskrænker os foreløbig til det i Fig. 4 viste Tilfælde med $k = 0$. Da vi kun vil foretage en Sammenligning mellem Momenterne fra P og $2P$, tager vi ikke Hensyn til »Vipperne« og faar da den viste Brudfigur. Naar Midtlinien sænkes 1, bliver Drejningerne for A, B og C henholdsvis $1:\frac{a}{2}$, $1:(a-c-x)$ og $1:x$, og Arbejdsligningen bliver

$$2ma\cdot\frac{2}{a}+ma\frac{1}{x}+ma\frac{1}{a-c-x}=2P\left(\frac{a}{2}-\frac{l}{4}\right)\frac{2}{a},$$

$$m\left(4+\frac{a(a-c)}{x(a-c-x)}\right)=P\cdot\frac{2a-l}{a}.$$

m bliver Maksimum for $x=\frac{1}{2}(a-c)$, d. v. s., naar Kræfterne staar lige langt fra Midten. Momentet bliver da

$$m_{2P}=\frac{P}{4}\cdot\frac{a-c}{2a-c}\cdot\frac{2a-l}{a}.$$

Under tilsvarende Forudsætninger faas for een Kraft ved at sætte $c=0$ og $\frac{1}{2}P$ i Stedet for P

$$m_P=\frac{P}{16}\cdot\frac{2a-l}{a},$$

altsaa

$$m_{2P}=4m_P\cdot\frac{a-c}{2a-c}.$$

Vender vi os dernæst til det almindelige Tilfælde (Sml. Fig. 7), hvor hver Kraft P er fordelt over Rektangelet $k\cdot l$, kan vi indføre den ved (1) givne Værdi for m_P og faar da

$$m_{2P}=\frac{P}{6}\cdot\frac{a-c}{2a-c}\cdot\frac{2a-k}{a}\cdot\frac{2a-l}{a}. \tag{2}$$

En Prøve paa denne Formel faas ved at sætte $k=c$, i hvilket Tilfælde vi faar Kraften $2P$ paa Rektangelet $2k\cdot l$, der ifølge (1) giver

$$m=\frac{P}{6}\cdot\frac{a-k}{a}\cdot\frac{2a-l}{a},$$

og dette giver (2) netop ogsaa.

Ved Sammenligning mellem (1) og (2) findes, at $m_{2P}>m_P$, naar $c<\frac{2}{3}a$. Med Formlerne (1) og (2) er dog ikke alle Muligheder udtømte, idet vi dels, naar $c<\frac{2}{3}a$, men $c+k>a$, ikke kan have begge Rektangslerne paa Pladen ved Beregningen af m_{2P}, og dels, naar $c>\frac{2}{3}a$, men $c<\frac{a}{2}+\frac{k}{2}$, faar en Del P' af den anden Kraft med paa Pladen ved Beregningen af m_P. Vi maa derfor have endnu en Formel, som vi vil danne som Interpolationsformel mellem m_P og m_{2P}. Idet vi for $c = 0$, hvor de to Kræfter falder sammen, har $m = 2m_P$, og for $c = \frac{1}{2}(a+k)$, hvor den ene Kraft netop falder udenfor, naar den anden staar paa Midten, har $m = m_P$, og for $c = a+k$, hvor begge Kræfter falder udenfor, har $m = 0$, kan vi sætte

$$m_{P+P'} = 2\left(1 - \frac{c}{a+k}\right) m_P,$$

hvorved de tre Betingelser opfyldes. Naar de to Kræfter lige netop kan staa paa Pladen, er $c+k = a$, og Formlen giver da

$$m_{P+P'} = 2\left(1 - \frac{c}{2a-c}\right) m_P = m_{2P},$$

altsaa ogsaa den Betingelse er opfyldt. Indføres Udtrykket for m_P faas

$$m_{P+P'} = \frac{P}{12} \cdot \frac{a+k-c}{a+k} \cdot \frac{2a-k}{a} \cdot \frac{2a-l}{a}. \tag{3}$$

Vi vil yderligere prøve denne Formel for $l = 0$. Brudfiguren i Fig. 5 giver

$$P' = \frac{P}{k}(a-x-c+k); \quad P_1 = \frac{P}{k}\left(x - \frac{a}{2}\right);$$

$$P_2 = \frac{P}{k}\left(k - x + \frac{a}{2}\right),$$

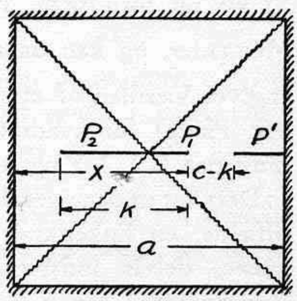

Fig. 5.

og Arbejdsligningen bliver

$$4ma = P'\frac{1}{2}(a-x-c+k) + P_1\left[\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right]$$
$$+ P_2\left[\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\left(k - x + \frac{a}{2}\right)\right]$$

$$m = \frac{P}{16ak}\left[(a-2c)^2 + 4k(a-c) - (c-x)^2\right],$$

der bliver Maksimum for $x = c$. Idet vi for samme Brudfigur har

$$m_P = \frac{P}{16} \cdot \frac{2a-k}{a},$$

kan vi sætte

$$m = m_P \cdot \frac{(a-2c)^2 + 4k(a-c)}{k(2a-k)}.$$

Derved findes

$$m_{P+P'} - m = m_P \cdot (a+k-2c)\frac{a(2c-a)+2k(c-k)}{k(a+k)(2a-k)} \geqq 0,$$

da vi altid har $c \geqq \frac{1}{2}a$ og $c \geqq k$ samt $c \leqq \frac{1}{2}(a+k)$, naar Formlen for $m_{P+P'}$ skal anvendes (se Fig. 8). Vi har altsaa altid $m_{P+P'} \geqq m$, men talmæssigt er Forskellen kun ringe; f. Eks. for $c = \frac{2}{3}a, k = \frac{1}{2}a$ faas $m = 1{,}037 \cdot m_P$ og $m_{P+P'} = 1{,}111 \cdot m_P$.

Vi vil dernæst undersøge Indflydelsen af delvise Indspændinger og en Afvigelse fra den kvadratiske Form svarende til Sideforholdet 2:3. For jævnt fordelt Belastning gælder ifølge *Ingerslev*[1])

$$m = \frac{pk^2}{24}\left[\sqrt{3+\frac{k^2}{l^2}} - \frac{k}{l}\right]^2,$$

hvor k er den korte Side og l den lange Side i Rektanglet. Er Pladen delvis indspændt med Indspændingsmomenterne $c_1 m$, $c_2 m$, $c_3 m$ og $c_4 m$ beregnes m ved samme Formel, men med de »reducerede« Sider

$$\frac{2k}{\sqrt{1+c_1}+\sqrt{1+c_3}} \quad \text{og} \quad \frac{2l}{\sqrt{1+c_2}+\sqrt{1+c_4}}.$$

Vi vil nu forudsætte Pladen armeret lige stærkt for positive og negative Momenter, og kan da efter de danske Normer sætte $c = \frac{2}{3}$. I Tabel 1 er angivet Værdien af $m:m_0$ (m_0 = Momentet i simpelt understøttet kvadratisk Plade) for kvadratiske og rektangulære Plader med delvis Indspænding paa 0, 1, 2, 3 og 4 Sider.

Dernæst undersøges det andet Grænsetilfælde, en Enkeltkraft paa en rektangulær, delvis indspændt Plade. Med Brudfiguren i Fig. 6 faas

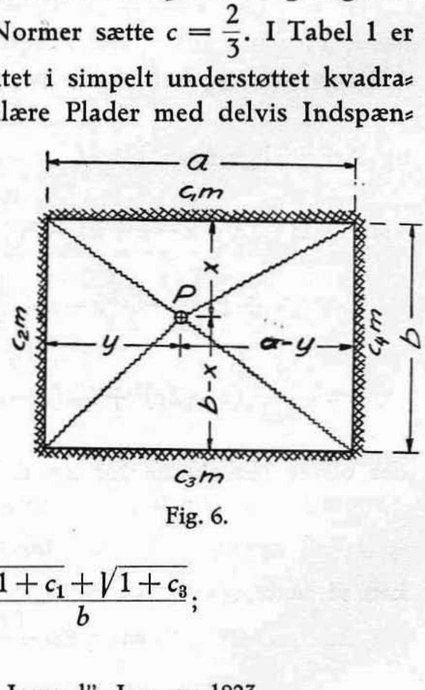

Fig. 6.

$$P \cdot 1 = m(1+c_1)\frac{a}{x} + m(1+c_3)\frac{a}{b-x} +$$

$$+ m(1+c_2)\frac{b}{y} + m(1+c_4)\frac{b}{a-y}.$$

$$\frac{\delta m}{\delta x} = 0, \text{ giver } \frac{1+c_1}{x^2} = \frac{1+c_3}{(b-x)^2},$$

eller

$$\frac{\sqrt{1+c_1}}{x} = \frac{\sqrt{1+c_3}}{b-x} = \frac{\sqrt{1+c_1}+\sqrt{1+c_3}}{b};$$

tilsvarende giver

[1]) "The Institution of Structural Engineers' Journal". January 1923.

$$\frac{\delta m}{\delta y} = 0, \quad \frac{\sqrt{1+c_2}}{y} = \frac{\sqrt{1+c_4}}{a-y} = \frac{\sqrt{1+c_2}+\sqrt{1+c_4}}{a}$$

og vi finder

$$\frac{m}{m_0} = 8 : \left[\frac{a}{b}\left(\sqrt{1+c_1}+\sqrt{1+c_3}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(\sqrt{1+c_2}+\sqrt{1+c_4}\right)^2\right],$$

hvor m_0 er Momentet i den simpelt understøttede kvadratiske Plade.

Da det kun angaar Forholdet mellem m og m_0 er der ikke taget Hensyn til »Vipperne«. Under samme Forudsætninger som før faas de i Tabel 1 anførte Værdier af $m : m_0$.

Tabel 1.

$k:l$	Belastningsform	Antal Indspændinger								
		0	1		2			3		4
			k	l	k, k	k, l	l, l	k, k, l	l, l, k	
1:1	p	1,00	0,87	0,87	0,76	0,76	0,76	0,67	0,67	0,60
	P	1,00	0,87	0,87	0,75	0,77	0,75	0,67	0,67	0,60
2:3	p	0,94	0,85	0,79	0,76	0,71	0,67	0,66	0,62	0,56
	P	0,92	0,84	0,76	0,77	0,71	0,63	0,65	0,59	0,55
Mindste Reduktion i %		0	13		23			33		40

Af Tabellen fremgaar for det første, at Momentet er praktisk talt det samme for kvadratiske og rektangulære Plader, der ikke er mere langstrakte end svarende til Sideforholdet 2:3. For det andet ses, at det simple Moment m_0 kan regnes reduceret med 10 % pr. Indspænding. Da dette gælder begge Grænsetilfældene, jævntfordelt Belastning og Enkeltkraft, kan det med en vis Tilnærmelse ogsaa regnes gældende for de til Formlerne (1)—(3) svarende Tilfælde. Vi kan derfor resumere vor Undersøgelse i følgende Resultater:

I en rektangulær Plade $a \cdot b$, hvor $\frac{2}{3} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{3}{2}$, og belastet med den i Fig. 7 viste Belastning, er det simple Moment pr. Længdeenhed i begge Retninger

$$m_P = \frac{P}{24} \cdot \frac{2a-k}{a} \cdot \frac{2b-l}{b},$$

$$m_{P+P'} = \frac{P}{12} \cdot \frac{a+k-c}{a+k} \cdot \frac{2a-k}{a} \cdot \frac{2b-l}{b}, \qquad \text{(I)}$$

$$m_{2P} = \frac{P}{6} \cdot \frac{a-c}{2a-c} \cdot \frac{2a-k}{a} \cdot \frac{2b-l}{b}.$$

Følgende Betingelser angiver hvilken Formel, der skal anvendes,

1) naar $a > 3k$,	2) naar $a < 3k$,
anvendes m_P for $a < \frac{3}{2}c$	anvendes m_P for $a < 2c - k$
— m_{2P} - $a > \frac{3}{2}c$	— $m_{P+P'}$ „ $2c - k < a < c + k$
	— m_{2P} „ $a > c + k$.

Dette er anskueliggjort i Fig. 8, hvor Beliggenheden af Punktet $\frac{k}{a}$, $\frac{c}{a}$ angiver om Pladen skal beregnes for P, $P + P'$ eller $2P$.

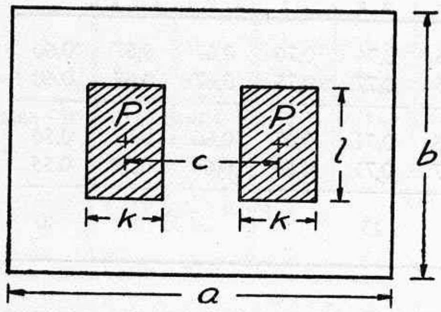

Fig. 7.

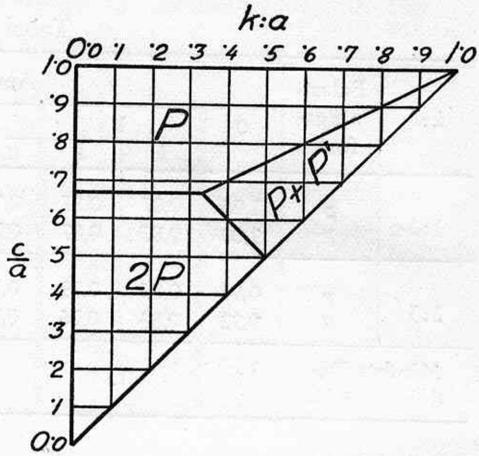

Fig. 8.

Er Pladen delvis indspændt, kan saavel det negative Moment ved Indspændingen som det positive Moment paa Midten i begge Retninger sættes lig

$$m_i = m_0\left(1 - \frac{i}{10}\right), \tag{II}$$

hvor m_0 er det ved (I) bestemte simple Moment, i Antallet af indspændte Sider. Kort sagt: hver Indspænding formindsker Momentet med 10 %.

Det skal til Slut bemærkes, at ovenstaaende Formler, der skal tjene til Beregning af en Blokvogns eller Motortromles Paavirkning paa en Brobaneplade, ikke tager en skraa Stilling af Vognen i Betragtning, da en saadan er uden praktisk Betydning og iøvrigt højst giver et ca. 10 % større Moment.